STRATEGIES OPTIMALES D'ALLOCATION DE PORTEFEUILLES INTERNATIONAUX AVEC CONTRAINTES

Fabrice Barthélémy[1]
Mahdi Mokrane[1]
Jean-Luc Prigent[1]

Cet article situe le rôle et l'importance de l'euro dans une perspective de choix de portefeuille international. Pour la plupart des investisseurs, les opportunités de placements se situent principalement à l'étranger. En effet, même si le marché financier mondial le plus important est sans aucun doute celui des Etats-Unis, qui représente environ 40% de la capitalisation boursière mondiale, une grande partie des opportunités d'investissements pour les Américains se situent en dehors de leur marché domestique.

Cependant, cette observation ne se traduit pas dans les faits, et l'on observe même le phénomène inverse de *home bias*. En ce qui concerne l'Europe, de nombreux observateurs avancent que les investisseurs sont notoirement sous-diversifiés en actifs internationaux, en regard de ce que prédirait un choix optimal (théorique) de portefeuille. Ce problème est relativement bien documenté, bien que les avis divergent sensiblement sur les causes de cette sous-diversification internationale. On peut citer le phénomène des "frictions" telles que les coûts de transactions, les conséquences de problèmes d'asymétrie d'informations, les limitations explicites pour la détention d'actifs par les investisseurs étrangers et surtout le risque dû à la volatilité des taux de change[2].

Il nous semble cependant qu'une grande partie du *home bias* peut être expliquée par la structure de la matrice de variance - covariance d'un investisseur une fois les rendements des actifs internationaux exprimés dans une monnaie domestique. A titre d'exemple, Cheol et Resnick (1988) montrent, sur la période 1980 à 1985, que la volatilité du taux de change explique 50 % de la volatilité en dollar des investissements en actions sur les marchés allemands, japonais et anglais. En outre, ces auteurs expliquent que les variations du taux de change (par référence au dollar) sont fortement corrélées avec les devises, ce qui indique qu'une grande partie du risque de change n'est pas diversifiable dans un portefeuille multi-devises.

Nous développons une théorie de l'investissement international, dans laquelle les gestionnaires prennent en considération les rendements de l'ensemble des actifs internationaux ainsi que les dynamiques des taux de change. Ce type de problématique

[1]THEMA, Université de Cergy-Pontoise. 33, Bd du Port, 95011, Cergy-Pontoise Cedex, France. Les auteurs remercient la Fondation Banque de France pour la Recherche en Economie Monétaire, Financière et Bancaire pour son support financier. Correspondance : mokrane@u-cergy.fr

[2]Pour une revue complète de la littérature, se référer aux parties I et II du rapport du THEMA cité en bibliographie sous Bénéssy-Quéré *et al.* (1999).

a déjà été abordé notamment par Solnik (1974), Adler et Dumas (1983), Odier et Solnik (1993) et Campbell (1991).

Une façon de modéliser le phénomène de *home bias* est de tenir compte explicitement de contraintes spécifiques lorsque l'on aborde le problème de la détermination du portefeuille optimal dans un cadre international. Une des applications de notre analyse est de permettre de s'interroger sur le rôle attendu de l'euro comme monnaie de réserve, et son impact sur une éventuelle réallocation durable des portefeuilles internationaux.

Nous abordons la question en examinant le problème du choix de portefeuilles optimaux pour des investisseurs bien définis, comme les fonds de pensions ou les sociétés d'assurance, tout en essayant d'inférer la nature des contraintes explicites et/ou implicites qu'ils s'imposent. Il s'agit ensuite de simuler la zone Euro en analysant les caractéristiques de rendement, de risque ainsi que la structure des covariances des actifs libellés en euro, sans oublier les nouvelles dynamiques de taux de change.

Ceci nous conduit alors à calculer les nouveaux portefeuilles optimaux à la suite de l'UEM. Cette modélisation permet de donner des ordres de grandeur et indique quels auraient été les choix opérés par un investisseur américain si l'UEM avait été en place pendant la période étudiée. Notons, que ce nouveau régime peut conduire une partie des investisseurs internationaux à modifier leurs contraintes, et ainsi à s'autoriser de meilleures possibilités de diversification internationale.

Dans la section suivante, nous présentons un modèle statique de choix de portefeuilles contraints et présentons les résultats en terme de réallocations de portefeuille à la suite de l'UEM et d'impact des contraintes pour un investisseur américain. La Section 2 propose un modèle dynamique de portefeuille en absence d'opportunité d'arbitrage. Nous montrons comment le comportement de préférence pour les actifs domestiques peut être compatible avec un modèle à variable d'état dans lequelle cette dernière est par exemple le taux d'intérêt domestique.

1 Modèle statique des marchés des capitaux internationaux

Les travaux en finance internationale se sont souvent orientés dans des directions assez éloignées, en raison notamment de la diversité des façons de mesurer les risques et les performances des investissements internationaux. La majorité des actifs échangés sur les marchés internationaux de capitaux sont libellés en termes nominaux et sont donc exposés au risque d'inflation et aux fluctuations de change. Comme le soulignent Basak et Gallmeyer (1999), les approches théoriques passées se sont organisées autour de plusieurs paradigmes afin de répondre à un nombre croissant de questions.

Le premier paradigme est représenté par le MEDAF international de Solnik (1974), puis viennent les modèles d'équilibre internationaux d'actifs qui étudient les quantités en termes réels (Dumas, 1992) et enfin les modèles prenant en compte les frictions à l'international ou encore des modèles d'équilibre internationaux incorporant des prix nominaux pour des agents obligés de détenir de la monnaie en raison de frictions sur les marchés.

Dans cet article, les prix des actifs et les taux de change sont supposés exogènes : l'investisseur est donc considéré comme un preneur de prix (*price taker*). Un élément important de notre approche est qu'un investisseur est supposé convertir l'ensemble de son portefeuille en sa monnaie domestique et en termes nominaux.

1.1 Un modèle simple de choix de portefeuille international

Considérons un modèle simple de choix de portefeuille sur une période, dans lequel on n'envisage de n'investir que dans trois pays : la France, l'Allemagne et les Etats-Unis. Il n'y a que deux types d'investissement par pays : l'un en actions et l'autre en obligations. Notons B^F, B^G et B^U les placements en obligations (pour la France, l'Allemagne et les Etats-Unis respectivement) et S^F, S^G et S^U les placements en actions.

1.2 Modèle moyenne-variance contraint et simulations

Considérons à présent un investisseur qui recherche la maximisation de son espérance d'utilité sous la forme moyenne - variance classique. On note λ son degré d'aversion pour le risque.

Notons R le vecteur des rendements espérés exprimés dans la devise de l'investisseur. La matrice de variance-covariance des rendements des actifs est notée Σ. On note θ le vecteur de taille $2N \times 1$ (où N représente le nombre de pays ; ici $N = 3$) des proportions de sa richesse initiale que l'investisseur décidera d'investir dans chaque actif. Le programme de l'investisseur, si sa seule contrainte est $\sum \theta_i = 1$, est alors le suivant :

$$\text{Max}_\theta : \theta' R - \frac{\lambda}{2}\theta'\Sigma\theta, \text{ sous la contrainte } \theta' e = 1 \tag{1}$$

où e est le vecteur unité. La solution est donnée par[3] :

$$\theta^* = \frac{1}{\lambda}\left[\Sigma^{-1}R + \left[\frac{\lambda - e'\Sigma^{-1}R}{e'\Sigma^{-1}e}\right]\Sigma^{-1}e\right] \tag{2}$$

L'équation (2) indique qu'un changement de l'aversion pour le risque peut modifier les proportions optimales de façon non triviale. Par exemple, dans le cas où la matrice Σ est diagonale, d'élément caractéristique σ_i^2, l'élément $\lambda - e'\Sigma^{-1}R$ s'écrit $\lambda - \Sigma_i \frac{R_i}{\sigma_i^2}$, valeur qui peut changer de signe si λ devient supérieur ou inférieur à $\Sigma_i \frac{R_i}{\sigma_i^2}$.

De plus, si l'on impose des contraintes spécifiques sur les proportions à investir, alors la solution optimale s'en trouvera modifiée. Avec des contraintes linéaires, le programme (1) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \text{Max}_\theta : \theta' R - \frac{\lambda}{2}\theta'\Sigma\theta, \text{ sous les contraintes} \\ \theta' e = 1 \\ P\theta = p \\ Q\theta \geq q \end{cases} \tag{3}$$

[3] Les détails de ce calcul se trouvent dans la partie IV du rapport du THEMA (1999).

où l'on a m contraintes d'égalité, en plus de la somme égale à 1, et l contraintes d'inégalités. P est de taille $m \times 2N$, p est un vecteur de taille $m \times 1$, Q est de taille $l \times 2N$ et enfin q est de taille $l \times 1$. Ce type de programme sera résolu numériquement[4].

1.3 Estimation des paramètres

Cette partie présente rapidement la méthode retenue pour estimer les rendements et la structure de variance - covariance. Pour chacun des trois pays considérés, nous avons utilisé des données mensuelles de Datastream et de Morgan Stanley Capital International (MSCI) qui donnent pour la période allant de janvier 1985 à juin 1995, les indices actions et obligations, ainsi que les taux de change. On suppose que la dynamique d'un indice S_t évalué dans sa monnaie d'origine suit un processus de diffusion standard :

$$dS_t = S_t \left(\mu^S dt + \sigma^S dW_t^S \right) \tag{4}$$

La solution de (4) est $S_t = S_0 \exp\{ \left[\mu^S - 1/2(\sigma^S)^2 \right] t + \sigma^S W_t^S \}$, avec pour espérance et variance :

$E\left[\frac{S_t}{S_{t-k}}\right] = \exp\{ \left[m^S + 1/2(\sigma^S)^2 \right] \times k \}$,

$V\left[\frac{S_t}{S_{t-k}}\right] = \exp\{ \left[2m^S + (\sigma^S)^2 \right] \times k \} \exp\{ \left[(\sigma^S)^2 \times k \right] - 1 \}$,

où $m^S = E\left[\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) \right] = \mu^S - 1/2(\sigma^S)^2$.

Notons I_t le taux de change qui convertit la devise de l'actif S_t en la devise de l'investisseur que l'on considère :

$$dI_t = I_t \left(\mu^I dt + \sigma^I dW_t^I \right) \tag{5}$$

Comme précédemment, la solution s'écrit :

$$I_t = I_0 \exp\{ \left[\mu^I - 1/2(\sigma^I)^2 \right] t + \sigma^I W_t^I \} \tag{6}$$

Soit $\tilde{S}_t$ l'actif S_t évalué dans la devise de l'investisseur ($\tilde{S}_t = S_t \times I_t$), on a : $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \left(\mu^{\tilde{S}} dt + \sigma^{\tilde{S}} dW_t^{\tilde{S}} \right)$, et la solution prend la forme suivante:

$$\tilde{S}_t = S_0 I_0 \exp\{ \left[\mu^S + \mu^I - 1/2(\sigma^S)^2 - 1/2(\sigma^I)^2 \right] t + \sigma^{\tilde{S}} W_t^{\tilde{S}} \} \tag{7}$$

où par identification : $\sigma^{\tilde{S}} = \sqrt{(\sigma^S)^2 + (\sigma^I)^2 + 2\sigma^S \sigma^I \rho^{SI}}$, et on posera $\tilde{S}_0 = S_0 I_0$.

Par construction, nous avons: $\forall S_i, \forall S_j, \rho^{S_i S_j} = \operatorname{corr}(W_t^{S_i}, W_t^{S_j})$. Ceci implique que pour tout actif S et pour tout taux de change I, $\rho^{SI} = \operatorname{corr}(W_t^S, W_t^I)$. On en déduit donc l'estimateur suivant pour le coefficient de correlation :

$\hat{\rho}^{SI} = \hat{\sigma}^{SI} / (\hat{\sigma}^S \hat{\sigma}^I)$. L'estimateur pour l'écart-type, noté $\hat{\sigma}^{\tilde{S}}$, s'écrit alors :

$$\hat{\sigma}^{\tilde{S}} = \sqrt{(\hat{\sigma}^S)^2 + (\hat{\sigma}^I)^2 + 2\, \hat{\sigma}^{SI}}$$

[4]Voir la présentation de la méthode de résolution numérique d'Uzawa dans la partie IV du rapport THEMA (1999).

L'estimateur de l'espérance annuelle ($k = 12$) d'un actif S converti au moyen du taux de change I s'écrit alors, en fonction des paramètres estimés, comme suit :

$$\hat{E}\left[R_t\right] = \hat{E}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-12}}\right] = \exp\{\left[\hat{m}^S + \hat{m}^I + 1/2(\hat{\sigma}^S)^2 + 1/2(\hat{\sigma}^I)^2 + \hat{\sigma}^{SI}\right] \times 12\} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}\hat{V}\left[R_t\right] = \hat{V}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-12}}\right] &= \exp\{\left[2\hat{m}^S + 2\hat{m}^I + (\hat{\sigma}^S)^2 + (\hat{\sigma}^I)^2 + 2\hat{\sigma}^{SI}\right] \times 12\} \\ &\times \exp\{\left[\left[(\hat{\sigma}^S)^2 + (\hat{\sigma}^I)^2 + 2\hat{\sigma}^{SI}\right] \times 12\right] - 1\}\end{aligned} \qquad (9)$$

où $\hat{m}^S = \frac{1}{T-1}\sum \ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})$, et $(\hat{\sigma}^S)^2 = \frac{1}{T-1}\sum\left[\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) - \hat{m}^S\right]^2$.

Les estimateurs des covariances se calculent de façon similaire.

1.4 L'investisseur Américain

Afin d'exploiter le modèle de choix de portefeuille standard présenté ci-dessus, nous avons calculé le vecteur des rendements annuels espérés R, une fois convertis en dollars, sachant que l'appréciation annuelle moyenne des devises européennes contre le dollar a été respectivement de 0,06 pour le franc français et de 0,071 pour le deutsche mark :

Tableau 1
Rendements annuels exprimés en dollars (1985:1-1995:12)

	B^F	B^G	B^U	S^F	S^G	S^U
$\hat{m}^{\tilde{S}}$	$0,0737$	$0,0749$	$0,0171$	$0,1598$	$0,1496$	$0,1183$
$\hat{E}\left[R_t\right]$	$1,0842$	$1,0876$	$1,0197$	$1,204$	$1,192$	$1,138$

Les valeurs pour la matrice de variance - covariance historique $\hat{\Sigma} = \hat{V}\left[R_t\right]$ des rendements annuels convertis pour l'investisseur américain sont :

Tableau 2
Matrice $\hat{\Sigma}$ historique pour un investisseur US (1985:1-1995:12)

	B^F	B^G	B^U	S^F	S^G	S^U
B^F	$0,0191$					
B^G	$0,0190$	$0,0216$				
B^U	$0,0032$	$0,0028$	$0,0031$			
S^F	$0,0195$	$0,0190$	$0,0045$	$0,0768$		
S^G	$0,0161$	$0,0177$	$-0,0036$	$0,0562$	$0,0796$	
S^U	$0,0003$	$-0,0017$	$0,0027$	$0,0228$	$0,0182$	$0,0289$

Le tableau suivant pourrait être considéré comme représentant le choix optimal observé pour une catégorie d'investisseurs américains : les *pension funds*. Il contient également la composition observée pour les assureurs français et allemands :

Tableau 3
Structure typique de portefeuille (en %) et '*Home Bias*'

Type d'actifs	Etats-Unis	France	Allemagne
Actions domestiques	48	69	10
Actions internationales	4	3	1
Obligations domestiques et assimilées	47	27	87
Obligations internationales et assimilées	1	1	2

Source : Pension Funds Indicators (1995) et FFSA.

Comme nous allons le voir, sur la période 1985-1995, les prédictions d'un modèle moyenne - variance simple non contraint ne permettent pas d'expliquer ces compositions. Des contraintes spécifiques doivent être incorporées à notre modèle pour retrouver une structure proche du portefeuille typique observé pour un investisseur institutionnel américain. A l'aide des données calculées précédemment, nous pouvons établir le profil du portefeuille optimal pour l'investisseur américain. Le graphique 1 en annexe représente la composition optimale théorique du portefeuille pour l'investisseur américain contraint par l'interdiction de vendre l'un quelconque des actifs à découvert, comme une fonction de son aversion pour le risque.

Cet investisseur ne fera entrer d'obligations américaines dans son portefeuille que pour des valeurs relativement élevées de λ, et ensuite l'accroissement du poids des obligations US est relativement lent. Par contre, si les actions françaises intéressent fortement l'investisseur US lorsque son aversion est faible, le poids de ces dernières diminue à une vitesse quasi exponentielle avec λ.

Le comportement de la composition en actions US est moins simple. Pour des valeurs faibles de λ, leur poids augmente à une vitesse semblable à celle de la décroissance constatée pour les actions françaises. Ainsi, pour des valeurs relativement faibles de λ, il y a bien *trade-off* entre actions françaises et américaines, le poids de ces dernières atteignant un maximum autour de 50% du portefeuille.

Cependant, pour des valeurs de λ supérieures à 10, un nouvel arbitrage se fait au détriment des actions US, et en faveur des obligations US. De façon relativement surprenante, le comportement général de la composition en obligations allemandes est similaire à celui des actions américaines. Leur poids est nul jusque $\lambda = 3$, pour ensuite croître régulièrement et atteindre plus de 40% du portefeuille, pour une valeur de λ telle que le poids des actions US avoisine les 50%. Ensuite, les poids de ces deux actifs déclinent en faveur des obligations US.

Pour ce qui concerne les actions allemandes, leur proportion dépasse les 20% pour de faibles valeurs de λ, mais diminue ensuite, tout en restant à un niveau quasi-incompressible de 5%. Enfin, avec les paramètres estimés, notre modèle donne un poids égal à zéro pour les obligations françaises, quelle que soit la valeur de λ. Globalement trois zones apparaissent :

- un *trade-off* entre actions françaises et américaines pour $\lambda < 3$, avec une forte sensibilité du portefeuille à l'aversion au risque de l'investisseur;

- une zone relativement peu sensible pour $3 < \lambda < 10$, dans laquelle la part des actions américaines est d'environ 50%.

- un "trade-off" en faveur des obligations américaines au détriment à la fois des actions américaines et des obligations allemandes ($\lambda > 10$).

On voit d'après le graphique 1 qu'il n'existe pas de valeur pour λ qui permette au modèle utilisé de reproduire, voire d'approcher, les compositions observées. Le graphique 2 en annexe représente une simulation dans laquelle le *home bias* est modélisé au moyen de la contrainte $B^U + S^U \geqslant 80\%$.

Remarquons ici que, pour les valeurs de λ retenues, la contrainte introduite est toujours saturée et que le comportement de l'investisseur est sensiblement modifié. En particulier, on ne retrouve plus dans la forme du portefeuille étranger l'importance des obligations allemandes.

1.5 Simulation du passage en régime UEM

Nous allons à présent utiliser une matrice de variance - covariance et des rendements anticipés en régime UEM issus de Bénassy-Quéré et Mojon (1998). Ces derniers considèrent un modèle macroéconomique simplifié à trois pays, Allemagne, Etats-Unis et France, entre 1972 et 1995. La structure de chaque économie, en termes de boucle prix-salaire, de demande intérieure et de demande d'importations et d'exportations, est supposée invariante à travers trois régimes de change entre l'Allemagne et la France : UEM, SME et changes flottants.

En régime de flottement ou d'UEM, le taux de change est modélisé à l'aide d'une parité des taux d'intérêt non couverts, avec des anticipations rationnelles et une prime de risque dont l'ampleur et la volatilité sont estimées.

Des simulations stochastiques sont mises en œuvre afin de déterminer l'impact du régime de change sur la volatilité de différentes variables macro économiques, notamment les taux d'intérêt, les prix et les taux de change qui nous intéressent ici. Ces simulations conduisent à la matrice $\hat{\Sigma}$ suivante pour les rendements annuels pour l'investisseur américain :

Tableau 4

Régime UEM : matrice $\hat{\Sigma}$ simulée pour un investisseur US

	B^{EU}	B^U	S^F	S^G	S^U
B^{EU}	$0,0126$				
B^U	$0,0025$	$0,0036$			
S^F	$0,0115$	$-0,0007$	$0,0709$		
S^G	$0,0099$	$-0,0020$	$0,0492$	$0,0716$	
S^U	$-0,0004$	$0,0030$	$0,0234$	$0,0193$	$0,0291$

Le graphique 3 an annexe est l'équivalent en régime UEM du graphique 1. Remarquons tout d'abord que l'allure générale des évolutions des poids des actifs dans le portefeuille US ne change guère. Cependant, et il s'agit là du résultat le plus important ici, à aversion au risque égale, on constate une réallocation du portefeuille de l'investisseur américain en faveur des placements en obligations libellées en euro, et ce au détriment des obligations US. Pour le reste, la composition du portefeuille n'est pas singulièrement modifiée. L'explication de ce résultat est que les simulations stochastiques montrent une anticipation à la baisse de la variance du taux de change dollar contre euro, et un accroissement de la variance des rendements obligataires américains.

Le graphique 4 de l'annexe reprend la contrainte des 80% investis en actifs domestiques dans le cas du régime UEM. Nos calculs montrent que cette contrainte est saturée pour toute valeur de $\lambda < 45$. D'autre part, remarquons que le fait d'introduire cette contrainte réduit l'attrait des obligations européennes pour l'investisseur américain, même pour de faibles valeurs de λ.

Nous avons vu dans cette partie que la théorie classique du choix statique de portefeuille permet de capter des effets non triviaux de chocs sur les rendements espérés, les volatilités et l'aversion au risque dans le cas d'un investisseur représentatif américain faisant face à des contraintes explicites.

La section suivante poursuit cette idée en insistant sur le rôle moteur du taux d'intérêt domestique dans le choix de portefeuille. Nous allons donc présenter un modèle de choix de portefeuille en temps continu dans lequel l'élément moteur est une variable d'état représentée par le taux d'intérêt domestique de l'investisseur. L'impact de cette modélisation nous semble pouvoir expliquer certains aspects du *home bias*.

2 Le marché financier international en temps continu

L'approche précédente, basée sur une modélisation en temps discret, ne permet pas de prendre suffisamment en compte l'évolution dynamique de certains facteurs déterminants comme l'influence des taux domestiques ou la spécificité de la volatilité importante des taux de change (propriété par exemple de “retour à la moyenne”, à plus ou moins long terme).

Nous exposons dans ce qui suit une modélisation en temps continu basée essentiellement sur une description de la dynamique des marchés par des processus gaussiens[5]. Puis nous choisissons d'illustrer notre approche dans un modèle d'équilibre des taux domestiques et des taux de change, introduit par Amin et Jarrow (1991) et étendu par Frachot (1995).

2.1 Les actifs financiers internationaux

Notons S^0 l'indice actions domestiques et S^j, $j \in \{1, ..., n-1\}$ les indices des actions étrangères. S^0 et S^j sont des vecteurs n_j-dimensionnels. Nous supposons que leurs dynamiques sont décrites par des diffusions :

$$\forall j \geq 0, \forall i \leq n_j, dS_t^{i,j} = S_t^{i,j} \left(\mu^{S^{i,j}} dt + [\sigma^{S^{i,j}}]' dW_t \right)$$

Comme précédemment, le mouvement brownien $(W_t)_t$ résume les différentes sources d'incertitude pesant sur les marchés. Nous supposons que le marché est complet, c'est-à-dire que le brownien a autant de composantes que le nombre d'actifs fi-

[5] Cette méthodologie peut cependant être étendue à d'autres dynamiques.

nanciers. Si d'autres sources d'incertitude peuvent être identifiées, nous introduisons le nombre de composantes supplémentaires nécessaires[6].

L'hypothèse de non arbitrage sur les marchés internationaux est cohérente dans la mesure où, en cas d'opportunité d'arbitrage momentanée, le marché corrige cette anomalie.

Considérons le facteur d'actualisation domestique β^0 :

$$\beta_t^0 = exp[\int_0^t r_s^0 ds] \tag{10}$$

Soit I_t^j, la valeur du taux de change de la monnaie étrangère j exprimée en monnaie nationale et $B^j(t,T)$ le zéro-coupon de référence du pays j.

Sous l'hypothèse de non-arbitrage, tous les actifs convertis en monnaie domestique et actualisés par le facteur β^0 sont des martingales sous la probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}^0$. Autrement dit $\frac{S_t^{i,j} I_t^j}{\beta_t^0}$ et $\frac{B_t^j I_t^j}{\beta_t^0}$ sont des martingales sous $\mathbb{Q}^0$.

Notons $\tilde{S}_t^{i,j}$ le prix unitaire exprimé en monnaie domestique de l'indice actions ($\tilde{S}_t^{i,j} = S_t^{i,j} I_t^j$) et $\tilde{B}_t^j$ celui de l'obligation zéro-coupon de référence $\tilde{B}_t^j = B_t^j I_t^j$. Rappelons que $(I_t^j)_t$ vérifie :

$$dI_t^j = I_t^j \left(\mu^{I^j} dt + [\sigma^{I^j}]' dW_t \right) \tag{11}$$

En conséquence, nous obtenons :

$$d\tilde{S}_t^{i,j} = \tilde{S}_t^{i,j} \left(\mu^{\tilde{S}^{i,j}} dt + [\sigma^{\tilde{S}^{i,j}}]' dW_t \right) \tag{12}$$

avec les paramètres suivants modifiés par le taux de change :

$$\mu^{\tilde{S}^{i,j}} = \mu^{I^j} + \mu^{S^{i,j}} - 1/2 \sigma'^{I^j} \sigma^{S^{i,j}} \text{ et } \sigma^{\tilde{S}^{i,j}} = \sigma^{I^j} + \sigma^{S^{i,j}} \tag{13}$$

Les valeurs des zéro-coupons sont données par :

$$d\tilde{B}_t^j = \tilde{B}_t^j \left(\mu^{\tilde{B}^j} dt + [\sigma^{\tilde{B}^j}]' dW_t \right)$$

avec les paramètres suivants modifiés par le taux de change :

$$\mu^{\tilde{B}^j} = \mu^{I^j} + \mu^{B^j} - 1/2 \sigma'^{I^j} \sigma^{B^j} \text{ et } \sigma^{\tilde{B}^j} = \sigma^{I^j} + \sigma^{B^j} \tag{14}$$

2.2 Le portefeuille optimal

Nous supposons que l'investisseur maximise l'utilité espérée de la valeur terminale de son portefeuille. L'ensemble de ses stratégies possibles est restreint à un sous-ensemble convexe fermé[7].

[6]Dans le cas de l'incomplétude, une mesure particulière neutre au risque doit être choisie.

[7]Pour une démonstration détaillée des résultats, voir Prigent (1999).

Cette hypothèse permet, par exemple, de tenir compte d'interdictions ou de restrictions de vente à découvert ou bien de fixer des bornes spécifiques sur les proportions à investir sur les différents actifs par catégorie ou par pays[8].

Considérons le processus X qui décrit la valeur du portefeuille associée à la stratégie θ de l'investisseur qui est le vecteur des proportions θ_l de son capital investies sur les actifs l. De manière standard, ces stratégies sont basées sur l'information délivrée par l'observation des prix, modélisée par la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.

Notons θ^{B^j} et $\theta^{S^{i,j}}$ les proportions investies respectivement sur le zéro-coupon B^j et l'indice actions $S^{i,j}$. La valeur du portefeuille est donnée par X_t :

$$\begin{aligned} dX_t = & \sum_j \theta^{B^j} X_t \left(\mu^{\tilde{B}^j} dt + [\sigma^{\tilde{B}^j}]' dW_t\right) \\ & + \sum_{i,j} \theta^{S^{i,j}} X_t \left(\mu^{\tilde{S}^{i,j}} dt + [\sigma^{\tilde{S}^{i,j}}]' dW_t\right) \\ & + (1 - \sum_j \theta^{B^j} - \sum_{i,j} \theta^{S^{i,j}}) X_t r^0 dt \end{aligned} \tag{15}$$

Le problème d'optimisation est le suivant :

$$Max \mathbb{E}[U(X_T)] : \text{ avec } \theta \in K$$

où K est un convexe fermé modélisant les contraintes sur les stratégies et U désigne la fonction d'utilité de l'investisseur.

On peut considérer en particulier le cas d'une fonction d'utilité à aversion absolue au risque constante (CARA)[9] : $U(x) = x^\alpha/\alpha$.

Introduisons la matrice des volatilités Σ_t et b_t le vecteur des rendements instantanés exprimés en monnaie domestique. Soit η_0 la prime de risque du marché. La fonction indicatrice du convexe $(-K)$ est notée $\delta(x|K)$. On a :

$$\delta(x|K) = sup_{\theta \in K}(-\theta' x)$$

Le portefeuille optimal exprimé en proportion du capital total investi est donné par (solution de Merton) :

$$\theta_t^* = \frac{1}{1-\alpha} [\Sigma_t \Sigma_t']^{-1} \left[\varphi_t + b_t - r_t^0 1\right]$$

où φ_t désigne le paramètre de Lagrange associé à la contrainte sur les stratégies d'investissement :

$$\varphi_t = argmin_{x \in \tilde{K}} \left[2\delta(x|K) + ||\eta_t^0 + \Sigma_t^{-1} x||^2 + 2(1-\alpha)\delta(x|K)\right]$$

Notons que pour le cas de l'utilité logarithmique $U(x) = Log(x)$, le portefeuille optimal est associé au processus φ solution de :

$$\varphi_t = argmin_{x \in \tilde{K}} \left[2\delta(x|K) + ||\eta_t^0 + \Sigma_t^{-1} x||^2\right]$$

[8] Les résultats mathématiques utilisés sont ceux de l'analyse convexe et de la théorie de la dualité (voir par exemple Cvitanic et Karatzas, 1992).

[9] Voir Prigent (1999) pour le cas général.

La solution est donc :

$$\theta_t^* = [\Sigma_t \Sigma_t']^{-1} \left[\varphi_t + b_t - r_t^0 1\right] \tag{16}$$

Notons que cette solution est analogue à celle du modèle sans contrainte de Merton mis à part le terme φ qui apparaît comme une modification des taux de rendements instantanés b. Ce processus est complètement déterminé par l'ensemble spécifique des contraintes K et dépend des paramètres du marché à travers la prime de risque η^0 et l'inverse de la matrice des volatilités Σ.

Pour déterminer la solution, il est nécessaire d'isoler le processus $(\varphi_t)_t$. Rappelons que dans le cadre de contraintes de type "rectangulaires" qui correspondent à des bornes spécifiques sur les proportions à investir, l'ensemble des contraintes K est le produit $\prod K_i$ où $K_i = [\alpha_i, \beta_i]$ pour des valeurs fixées $-\infty \leq \alpha_i \leq 0 \leq \beta_i \leq +\infty$. En conséquence, $\delta(x|K) = \sum_i \beta_i(-x_i) \wedge 0 - \sum_i \alpha_i x_i \vee 0$, où $a \wedge 0$ (resp. $a \vee 0$) désigne le minimum entre 0 et a (resp. le maximum).

Remarquons qu'en observant le choix des investisseurs θ_t^*, il est possible d'en déduire φ et donc, sous certaines conditions, d'identifier les contraintes représentées par K. L'exemple suivant va illustrer cette possibilité de retrouver les contraintes de l'investisseur.

2.3 Exemple

Illustrons à présent ces résultats en considérant le modèle de structure à terme des taux d'intérêt et des taux de change d'Amin et Jarrow (1991) et de Frachot (1995). Ce modèle introduit un système cohérent pour décrire la structure de ces taux en excluant les possibilités d'arbitrage. Des volatilités stochastiques peuvent, par exemple, être incluses dans ce modèle et être compatibles avec une forme de la structure à terme qui est linéaire par rapport aux variables d'état.

Considérons un investisseur qui traite deux indices, l'un domestique S^1 et l'autre étranger S^2, et dont les dynamiques sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} dS_t^1 & = & S_t^1[\mu^1 dt + \sigma^{1,1} dW_t^1 + +\sigma^{1,2} dW_t^2] \\ dS_t^2 & = & S_t^2[\mu^2 dt + \sigma^{2,1} dW_t^1 + \sigma^{2,2} dW_t^2] \end{array} \right.$$

Il existe une corrélation entre ces indices. r^f désigne le taux domestique étranger. r_t et I_t sont des processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) et vérifient donc la propriété de "retour à la moyenne" :

$$\left\{ \begin{array}{lll} dr_t & = & (\phi - \varphi r_t)dt + \sqrt{\alpha r_t} dW_t^3 \\ \frac{dI_t}{I_t} & = & (r_t - r_t^f)dt + \sqrt{\alpha r_t}(a^I dW_t^3 + b^I dW_t^4) \end{array} \right.$$

Le taux de change a un risque additionnel modélisé par W^4. Complétons enfin le marché par deux actifs fictifs :

$$\left\{ \begin{array}{lll} dS_t^3 & = & S_t^3[dW_t^3] \\ dS_t^4 & = & S_t^4[dW_t^4] \end{array} \right.$$

La matrice Σ est alors donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sigma^{1,1} & \sigma^{1,2} & 0 & 0 \\ \sigma^{2,1} & \sigma^{2,2} & (\sqrt{\alpha r_t})a^I & (\sqrt{\alpha r_t})b^I \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Son inverse est :

$$\frac{1}{(\sigma^{1,1}\sigma^{2,2}-\sigma^{1,2}\sigma^{2,1})}\begin{bmatrix} \sigma^{2,2} & -\sigma^{1,2} & \sigma^{2,2}(\sqrt{\alpha r_t})a^I & \sigma^{2,2}(\sqrt{\alpha r_t})b^I \\ -\sigma^{2,1} & \sigma^{1,1} & -\sigma^{1,1}(\sqrt{\alpha r_t})a^I & -\sigma^{1,1}(\sqrt{\alpha r_t})b^I \\ 0 & 0 & (\sigma^{1,1}\sigma^{2,2}-\sigma^{1,2}\sigma^{2,1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sigma^{1,1}\sigma^{2,2}-\sigma^{1,2}\sigma^{2,1}) \end{bmatrix}$$

L'excès de taux de rendement instantané b est :

$$\begin{cases} b_t^1 & = & \mu^1 - r_t \\ b_t^2 & = & \mu^2 - r_t^f \\ b_t^3 & = & -r_t \\ b_t^4 & = & -r_t \end{cases}$$

La prime de risque η^0 vérifie $\eta_t^0 = \Sigma_t^{-1}[b_t - r_t 1]$, ce qui implique ici :

$$\begin{cases} \eta_t^1 & = & \frac{(\mu^1-r_t)\sigma^{2,2}-(\mu^2-r_t^f)\sigma^{1,2}-r_t\sigma^{2,2}(\sqrt{\alpha r_t})(a^I+b^I)}{\sigma^{1,1}\sigma^{2,2}-\sigma^{1,2}\sigma^{2,1}} \\ \eta_t^2 & = & \frac{-(\mu^1-r_t)\sigma^{2,1}+(\mu^2-r_t^f)\sigma^{1,1}+r_t\sigma^{1,1}(\sqrt{\alpha r_t})(a^I+b^I)}{\sigma^{1,1}\sigma^{2,2}-\sigma^{1,2}\sigma^{2,1}} \\ \eta_t^3 & = & -r_t \\ \eta_t^4 & = & -r_t \end{cases}$$

Le cône des contraintes K est donné par :

$$K = \{\theta \in I\!R^4 | \alpha_1 \leq \theta_1 \leq \beta_1; \alpha_2 \leq \theta_2 \leq \beta_2; \theta_3 = \theta_4 = 0\}$$

La fonction $\delta(x|K)$ est définie par :

$$\delta(x|K) = \beta_1((-x_1)\wedge 0) + \beta_2((-x_2)\wedge 0) - \alpha_1(x_1 \vee 0) - \alpha_2(x_2 \vee 0).$$

Rappelons que le portefeuille optimal θ^* vérifie :

$$\theta_t^* = [\Sigma_t\Sigma_t']^{-1}\left[\varphi_t + b_t - r_t^0 1\right]$$

Supposons par exemple que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$ (pas de possibilité de vente à découvert sur ces titres). Nous procédons ensuite à des simulations, représentées par le graphique 5 de l'annexe, pour les paramètres suivants :

r_t^f	μ_1	μ_2	$\sigma^{1,1}$	$\sigma^{1,2}$	$\sigma^{2,1}$	$\sigma^{2,2}$	α	$a^I = b^I$	$\beta_1 = \beta_2$
0,025	0,10	0,15	0,20	0,15	0,15	0,19	1,00	2,00	3,00

Dans ce modèle, la variable d'état est le taux domestique r_t. C'est à partir de cette variable d'état que l'on détermine complètement la structure du portefeuille optimal. Ainsi, on retrouve bien l'effet qu'à partir d'un certain seuil, une hausse du taux domestique favorise l'investissement dans l'actif obligataire, au détriment des indices actions domestiques et étrangers.

D'un point de vue empirique, il est nécessaire de déterminer la matrice des volatilités Σ et d'estimer la prime de risque associée à la fonctionnelle des prix, c'est-à-dire la probabilité risque-neutre qui lui est associée. Bien évidemment, celle-ci dépend des dynamiques des taux de change et prend donc en compte le risque de change. Par la suite, il est possible de calculer le portefeuille optimal à partir des contraintes spécifiques en utilisant un programme auxiliaire non contraint dans lequel tous les *drifts* ont été modifiés par addition du processus φ. Ce processus est lui-même la solution d'un problème de minimisation particulier, qui peut être résolu de manière explicite ou dont les solutions peuvent aisément être calculées numériquement.

Conclusion

Cet article offre un cadre cohérent pour l'analyse des investissements domestiques et internationaux. En partant d'un modèle statique, nous résolvons le problème du choix de portefeuille international pour un investisseur soumis à des contraintes spécifiques (limitation d'investissements, restrictions sur les ventes à découverts...).

Les intuitions issues de ce premier modèle nous ont ensuite amenéés à élaborer un modèle dynamique s'appuyant sur une hypothèse spécifique de non arbitrage : tous les actifs exprimés en monnaie domestique et actualisés au taux domestique sont des martingales sous une probabilité risque-neutre. La modélisation de la structure par terme des taux peut ainsi par exemple suivre les conditions d'absence d'opportunités d'arbitrage de Heath, Jarrow and Morton (1992). De plus, en suivant Frachot (1995), nous pouvons retenir des structures de volatilités stochastiques pour les taux domestiques et étrangers et déterminer de façon endogène la structure par terme des taux étrangers.

D'autre part, nous suggérons d'inverser le raisonnement d'optimisation classique. En effet, à partir des solutions observées pour le portefeuille optimal, il est possible d'extraire de l'information concernant la forme des contraintes que s'impose l'investisseur. Il nous semble intéressant et prometteur d'analyser en particulier la façon dont évoluent les contraintes en fonction de variables mesurables ou de facteurs macroéconomiques particuliers ou, plus près de notre contexte, en fonction de l'évolution de coûts particuliers comme les coûts de transactions, d'information... présents sur les marchés financiers internationaux.

Bibliographie

Adler M. et Dumas B., "International Portfolio Choice and Corporation Finance: a Synthesis". *Journal of Finance*, 38, Juin, 1983, p. 925-984.

Amin K. et Jarrow R., "Pricing Foreign Currency Options Under Stochastic Interest Rates". *Journal of International Money and Finance*, 10, 1991, p. 310-329.

Basak S. et Gallmeyer M., "Currency Prices, the Nominal Exchange Rates, and Securities Prices in a Two-Country Dynamic Monetary Equilibrium", *Mathematical Finance*, 9, 1999, p. 1-30.

Bénassy-Quéré A., F. Barthélémy, Ma. Bellalah, Mo. Bellalah, M. Mokrane, et J.-L. Prigent, "Diversification internationale, coûts de transactions et choix de portefeuille à la suite de l'UEM", Rapport du THEMA pour la Fondation Banque de France, 1999.

Bénassy-Quéré A. et Mojon B., "EMU and Transatlantic Exchange Rate Stability ", document de travail du CEPII n°98-02, 1998.

Campbell R.H., "The World Price of Covariance Risk", *Journal of Finance*, 46, Mars, 1991, p. 111-158.

Cheol S. et Resnick G., "Exchange Rate Uncertainty, Forward Contracts, and International Portfolio Selection", *Journal of Finance* 43, 1988.

Cox J.C., Ingersoll J.E. et Ross S.A., "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 1985, p. 385-407.

Copeland T.E. et Weston J.F., *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley, 1988.

Cvitanic J. et Karatzas I., "Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization", *The Annals of Applied Probability*, 2 No 4, 1992, p. 767-818.

Dumas B., "Dynamic Equilibrium and the Real Exchange Rate in a Spatially Separated World . *Review of Financial Studies*, 5, 1992, p. 153-180.

Frachot A., "Factor Models of Domestic and Foreign Interest Rates with Stochastic Volatility", *Mathematical Finance*, 5, 1995, p. 167-185.

Heath D., R. Jarrow et Morton A., "Bond pricing and the Term structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claim Valuation", *Econometrica*, 60, 1992, p. 77-106.

Odier P.et Solnik B., "Lessons for International Asset Allocation", *Financial Analysts Journal*, 1993, p. 63-67.

Pliska S.R., "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolio", *Math. Oper. Res.*, 11, 1986, p. 371-382.

Prigent J.-L., "Optimal Investment Strategies for International Portfolios With Constraints", Working Paper, University of Cergy, 1999.

Solnik, B., "An Equilibrium Model of the International Capital Market", *Journal of Economic Theory*, Août, 1974.